Enseignant : Mathieu Huruguen
Algèbre Linéaire - CMS
19 avril 2024
Durée : 105 minutes

X

Contrôle 3 (corrigé)

SCIPER : **XXXXXX**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 8 questions et 7 pages, les dernières pouvant être vides. Il y a 30 points au total. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table et vérifiez votre nom et votre numéro SCIPER sur la première page.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Première partie, questions à choix unique

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Pour les **Questions 1, 2 et 3** on donne les éléments suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (1, 1, -1)\,,\ v_2 = (2, -1, 1)\,,\ v_3 = (3, 3, 1)\,,\ v_4 = (8, 5, 3)\,,\ v_5 = (4, -2, 2)\,,$$

On sait aussi que la famille $\mathcal{B} = v_1, v_2, v_3$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (pas nécessaire de le vérifier).

Question 1 (2 points) Sélectionner l'équation (ou les équations) qui décri(ven)t le sous-espace vectoriel suivant de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathrm{Vect}(3v_2 - 2v_3, v_4 - 2v_5)\,.$$

☐ $y = 9z$ ■ $x = 0,\ \frac{y}{9} = -z$ ☐ $x = 0,\ 9y = -z$ ☐ $y + 9z = 0$

Correction : C'est la droite vectorielle engendrée par $(0, 9, -1) = v_4 - 2v_5 = -(3v_2 - 2v_3)$.

Question 2 (2 points) Quel est le coefficient de v_1 dans la décomposition de v_4 sur $\mathcal{B}$?

☐ 2 ☐ 3 ■ 0 ☐ 1

Correction : La relation trouvée à la Question 1 donne $v_4 = 2v_5 - 3v_2 + 2v_3 = v_2 + 2v_3$.

Question 3 (2 points) Laquelle des familles ci-dessous est une base de $\mathbb{R}^3$?

☐ v_1, v_2, v_5 ☐ v_2, v_3, v_4 ■ v_1, v_3, v_4 ☐ v_3, v_4, v_5

Correction : Comme $v_5 = 2v_2$*, la famille* v_1, v_2, v_5 *est directement éliminée. Par ailleurs, la relation trouvée à la Question 2 élimine aussi la famille* v_2, v_3, v_4 *et donc aussi la famille* v_3, v_4, v_5 *(toujours du fait que* v_2 *et* v_5 *sont proportionnels).*

Pour les **Questions 4, 5 et 6** on donne, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,,\ (x, y, z) \to (x + 5y + 6z, 2x + 10y + 12z, (3\alpha - 5)x + (\alpha + 3)y + (4\alpha - 2)z)\,.$$

Question 4 (2 points) Pour combien de valeur(s) de α l'application f est-elle de rang 1 ?

- [ ] 0
- [x] 1
- [ ] 2
- [ ] une infinité

Correction : Il y a une seule solution à $3\alpha - 5 = \frac{\alpha+3}{5} = \frac{4\alpha-2}{6}$, à savoir $\alpha = 2$.

Question 5 (2 points) Pour combien de valeur(s) de α a-t-on $(7, 14, -23) \in \mathrm{Im}\, f$?

- [ ] 1
- [ ] 0
- [x] une infinité
- [ ] 2

Correction : Pour tout $\alpha \neq 2$, le plan vectoriel $\mathrm{Im}\, f$ a pour équation $y = 2x$.

Question 6 (3 points) Pour combien de valeur(s) de α peut-on trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $[f]_{\mathcal{B}}$ a sa première colonne et sa dernière ligne nulle, c'est-à-dire qu'elle est de la forme :

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & \star & \star \\ 0 & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ?$$

- [ ] 0
- [ ] une infinité
- [x] 1
- [ ] 2

Correction : Notons $\mathcal{B} = v_1, v_2, v_3$. Pour $\alpha \neq 2$, on a :

$$\underbrace{\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}((1, 1, -1))}_{\mathrm{Vect}(v_1)} \not\subset \underbrace{\mathrm{Im}\, f : y = 2x}_{\mathrm{Vect}(v_1, v_2)}$$

ce qui empêche l'existence d'une telle base. Pour $\alpha = 2$ une telle base existe, on peut par exemple prendre :

$$v_1 \in \mathrm{Ker}\, f : x + 5y + 6z = 0 \text{ et } v_2 \in \mathrm{Im}\, f : x = \tfrac{y}{2} = z\,.$$

Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 7: *Cette question est notée sur 10 points.*

.5 .5 .5 .5 .5 .5 .5 .5 .5 .5
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,,\ (x,y,z) \to (x+7y-2z, -x-2y+z, -3x+4y+z)$$

(a) Donner la matrice A de f en base canonique. Quel est le déterminant de A ?

(b) Déterminer une décomposition colonne-ligne minimale de A.

(c) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\, f$ et une équation de $\mathrm{Im}\, f$.

(d) Pour tout $w = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, décrire l'ensemble $f^{-1}(\{w\})$ des antécédents de w par f.

Solution

(a) La matrice en base canonique de l'application f vaut :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient alors (par opérations $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1$ puis développement selon la première colonne) :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 25 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 25 & -5 \end{vmatrix} = 0\,.$$

(b) Les calculs effectués au (a) montrent que l'on a la relation :

$$L_3 + 3L_1 = 5(L_2 + L_1) \quad \Leftrightarrow \quad L_3 = 2L_1 + 5L_2$$

où L_1, L_2 et L_3 sont les lignes de la matrice A. Cela conduit à la décomposition :

$$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ 2L_1 + 5L_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} L_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} L_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette décomposition est minimale. En effet, on a vu au (a) que A est de déterminant nul, et donc de rang $\leqslant 2$. Elle est aussi de rang $\geqslant 2$ car les lignes L_1 et L_2 ne sont pas proportionnelles. A est de rang 2 : ses décompositions minimales sont de longueur 2.

(c) D'après la décomposition minimale trouvée au (b) on a les descriptions suivantes :

$$\mathrm{Ker}\, f : \begin{cases} x + 7y - 2z = 0 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}((1,0,2),(0,1,5))\,.$$

Pour trouver une base de $\mathrm{Ker}\, f$ on résout le système ci-dessus :

$$\begin{cases} x + 7y - 2z = 0 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 7y - 2z = 0 \\ 5y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ z = 5y \end{cases} \Leftrightarrow \cdots$$

$$\cdots \Leftrightarrow (x, y, z) = (3y, y, 5y) \Leftrightarrow (x, y, z) = y(3, 1, 5)$$

$\operatorname{Ker} f$ est une droite vectorielle et $(3, 1, 5)$ en est une base. On a aussi :

$$\operatorname{Im} f : \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} z = -2x - 5y + z = 0\,.$$

(d) Pour tout $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a:

$$v \in f^{-1}(\{w\}) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 7y - 2z = a \\ -x - 2y + z = b \\ -3x + 4y + z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 7y - 2z = a \\ 5y - z = a + b \\ 25y - 5z = 3a + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 7y - 2z = a \\ 5y - z = a + b \\ 0 = -2a - 5b + c \end{cases}$$

Si $2a + 5b \neq c$, ou autrement dit si w n'appartient pas à $\operatorname{Im} f$, alors w ne possède aucun antécédent par f, c'est-à-dire:

$$f^{-1}(\{w\}) = \varnothing.$$

Supposons à présent que $2a + 5b = c$. On obtient alors:

$$v \in f^{-1}(\{w\}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -a - 2b + 3y \\ z = -a - b + 5y \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z) = \underbrace{(-a - 2b, 0, -a - b)}_{\text{antécédent particulier}} + y \underbrace{(3, 1, 5)}_{\text{base de } \operatorname{Ker} f}.$$

L'ensemble des antécédents de w par f est dans ce cas la droite parallèle à $\operatorname{Ker} f$ passant par $(-a - 2b, 0, -a - b)$.

Question 8: *Cette question est notée sur 7 points.*

.5 .5 .5 .5 .5 .5 .5
0 1 2 3 4 5 6 7

On note $\mathcal{B}_{\mathbf{can}}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On donne aussi l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,,\ (x, y, z) \to (2x - 3y + z, -4x + 6y - 2z, 6x - 9y + 3z)\,.$$

Dans chacun des cas suivants, dire s'il existe une base :

$$\mathcal{B} = v_1, v_2, v_3$$

de $\mathbb{R}^3$ vérifiant la condition donnée. Si vous pensez qu'une telle base existe, donnez-en un exemple et justifiez brièvement. Sinon, expliquez pourquoi il n'en existe pas.

(a) $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}_{\mathrm{can}}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ (b) $[f]_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$.

A noter que les trois parties (a), (b) et (c) sont donc **indépendantes**.

Solution Notons e_1, e_2 et e_3 les vecteurs de la base canonique :

$$e_1 = (1, 0, 0)\,,\ e_2 = (0, 1, 0)\,,\ e_3 = (0, 0, 1)\,.$$

(a) Un telle base $\mathcal{B}$ existe bien. Par exemple, posons :

$$v_1 = (3, 2, 0)\,,\ v_2 = (0, 0, 1)\,,\ v_3 = (\tfrac{1}{2}, 0, 0).$$

Contrôlons qu'il s'agit bien d'une base de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0\,.$$

Par ailleurs, on a :

$$\begin{cases} f(v_1) = f(3, 2, 0) = (0, 0, 0) = 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 \\ f(v_2) = f(0, 0, 1) = (1, -2, 3) = e_1 - 2e_2 + 3e_3 \\ f(v_3) = f(\frac{1}{2}, 0, 0) = (1, -2, 3) = e_1 - 2e_2 + 3e_3 \end{cases} \Rightarrow\ [f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}_{\mathrm{can}}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Une telle base $\mathcal{B}$ n'existe pas. En effet, on aurait sinon :

$$f(3, 2, 0) = (0, 0, 0) \quad\Rightarrow\quad [f]_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}},\mathcal{B}}[(3, 2, 0)]_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui n'est pas le cas.

(c) Un telle base $\mathcal{B}$ existe bien. Par exemple, posons :

$$v_1 = (3, 2, 0)\,,\ v_2 = (0, 1, 3)\,,\ v_3 = (1, -2, 3).$$

Contrôlons qu'il s'agit bien d'une base de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 33 \neq 0\,.$$

Par ailleurs, on a :

$$\begin{cases} f(v_1) = f(3,2,0) = (0,0,0) = 0v_1 + 0v_2 + 0v_3 \\ f(v_2) = f(0,1,3) = (0,0,0) = 0v_1 + 0v_2 + 0v_3 \\ f(v_3) = f(1,-2,3) = (11,-22,33) = 0v_1 + 0v_2 + 11v_3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad [f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}\,.$$